

Estudo de Modelos Matemáticos para a Análise Térmica na Pele Humana

Study of Mathematical Models for Thermal Analysis in Human Skin

Thays Rolim Mendes de Oliveira¹, Gylles Ricardo Ströher², Neyva Maria Lopes Romeiro³,
Gisely Luzia Ströher⁴

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Brasil

²Coordenação de Engenharia Química, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Brasil

³Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil

⁴Coordenação de Química, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Brasil

Resumo

O melanoma é considerado o mais perigoso dos cânceres de pele, isso porque ele apresenta alta taxa de metástase e o maior índice de mortalidade por tumores cutâneos. Uma forma de reduzir esse índice seria o diagnóstico precoce do tumor. Imagens térmicas associadas a modelos matemáticos térmicos da pele têm-se mostrados muito eficazes no diagnóstico de melanomas, isso porque juntamente com a lesão surgem vasos sanguíneos, o que provoca um aumento da temperatura no local. No presente trabalho são apresentados resultados de simulações numéricas do comportamento térmico da pele por meio do modelo *Dual Phase Lag* (DPL). A solução numérica do modelo foi obtida por meio do método de diferenças finitas utilizando um esquema implícito. Os resultados obtidos numericamente foram comparados com soluções analíticas e numéricas disponíveis na literatura, obtendo-se excelente concordância entre as soluções. Os parâmetros do modelo DPL foram também explorados para obter a solução numérica do modelo *Single Phase Lag* (SPL) e do modelo clássico de Pennes, estes três modelos foram avaliados quanto à qualidade de previsão para um caso real clínico para a situação em que a pele apresenta uma região não sadia pela presença de um melanoma.

Palavras-chave: Análise Térmica, Pele Humana, Melanoma, modelo *Dual Phase Lag* (DPL).

Abstract

The melanoma is considered to be the most dangerous of the skin cancers, for it presents a high rate of metastasis and the highest mortality rate for skin tumors. A way of reducing this rate would be an early diagnosis of the tumor. Thermal imaging have proved to be very effective on the diagnosis of melanomas, that is because together with the lesion blood vessels appear, which induces the temperature to rise in the area. For the modelling of the heat transfer in the skin it was used the Dual Phase Lag model (DPL). The numerical solution of the model was obtained through the finite difference method. The results achieved were compared with analytical and numerical solutions available in literature, reaching an excellent agreement within the solutions. The parameters of the DPL model were also explored in order to get the numerical solution of Single Phase Lag model (SPL) and the classic Pennes model, these three models were assessed in terms of ability of predicting a real clinical case for a situation in which the skin presents a unhealthy area due to the presence of a melanoma.

Keywords: Thermal Analysis, Human Skin, Melanoma, Dual Phase Lag Model (DPL).

1. Introdução

O câncer de pele é o câncer com maior incidência basicamente em todas as populações do mundo. Dentre os diversos tipos desse câncer destaca-se o melanoma, tumor responsável por aproximadamente 79% dos casos de morte por câncer de pele. O melanoma tem origem nos melanócitos, células produtoras de melanina. Ele corresponde a apenas 3% dos casos de tumores na pele. Embora a baixa incidência, ele é considerado o mais grave tumor da pele por apresentar alta possibilidade de metástase e aproximadamente 27% dos seus casos resultarem em mortes, Inca¹.

Bezerra² afirma que com o surgimento de um tumor novos vasos sanguíneos são criados e este novos vasos aumentam o fluxo de sangue na região e provocam um aumento na temperatura.

Historicamente, Pennes³, em 1948, foi o primeiro a propor um modelo de transferência de calor na pele humana por meio da distribuição radial de temperatura no antebraço humano. Esse modelo ganhou grande aceitação por apresentar dados compatíveis com resultados experimentais, embora ainda não tivesse sido comprovado. A validação do modelo veio em 1998 quando Wissler⁴ publicou uma revisão do trabalho de Pennes³ apoiando seu modelo. Conseqüentemente esse modelo passou a ser mais adotado por estudiosos nessa área, Bueno⁵. No modelo de Pennes o modo de transferência de calor por condução é avaliado por meio da Lei de Fourier clássica.

Contudo, a Lei de Fourier clássica admite que qualquer perturbação de calor pode ser sentida pelo tecido da pele em todo o corpo, independente da distância ao ponto que sofre a variação, ou seja, a

lei de Fourier implica em uma velocidade de propagação de calor infinita. A fim de corrigir este problema, separadamente Cattaneo⁶ e Vernotte⁷, propuseram o modelo que ficou conhecido como não Fourier ou Fourier modificado onde o fluxo de calor aumenta com o tempo de relaxação, e não surge instantaneamente como na lei de Fourier. O tempo de relaxação é descrito como o tempo necessário para o acúmulo de energia térmica necessária para propagação da onda térmica⁸.

Com o intuito de melhorar o modelo de Pennes, o mesmo foi modificado, inicialmente acrescentou-se um tempo de relaxação térmica do fluxo de calor τ_q dando origem ao método *Single Phase Lag* (SPL). Posteriormente adicionou-se um segundo termo a equação, τ_t ou tempo de termalização, surgindo o modelo *Dual Phase Lag* (DPL). As alterações realizadas eliminam a existência de resposta instantânea entre o gradiente de temperatura e o transporte de energia e faz com que a onda térmica se propague com velocidade finita,⁹.

Atualmente imagens térmicas vêm demonstrando resultado satisfatório no diagnóstico de doenças. Bezerra² afirma que a termografia é uma técnica que se mostra viável para ser usada em aplicações médicas. Isso ocorre pelo fato de ela ser uma técnica não destrutiva, que não utiliza radiações ionizadas, além de ser não invasiva e indolor. O autor ainda destaca que essa técnica pode ser usada na detecção de diversos tipos de câncer e patologias que proporcionem um aumento de temperatura na pele do paciente.

Nesse âmbito autores como Çetingül e Herman¹⁰, Nobrega e Coelho¹¹ e Mitra¹² têm procurado encontrar um modelo matemático que melhor modele ao comportamento térmico na pele humana. Contudo os trabalhos nessa área ainda não apresentam um consenso sobre qual o modelo e quais parâmetros físicos são mais adequados.

O presente trabalho apresenta a solução numérica de três modelos térmicos para transferência de calor na pele humana. Onde se buscou comparar os resultados com dados experimentais presentes na literatura. Além disso, procurou-se mostrar a divergência entre os resultados disponíveis na literatura. Os modelos implementados foram o de Pennes, SPL e DPL em duas dimensões. Para a discretização do modelo matemático foi empregado o método de diferenças finitas com esquema implícito.

2. Materiais e Métodos

2.1. Modelagem Matemática

Embora os melanomas apresentem geometrias irregulares para domínio computacional, no presente trabalho foi definida uma geometria elipsoidal. Podendo-se variar os parâmetros posição em relação à malha de pele e diâmetros do tumor. Quanto à pele considerou-se um domínio bidimensional. A Figura 1 mostra uma representação do domínio computacional.

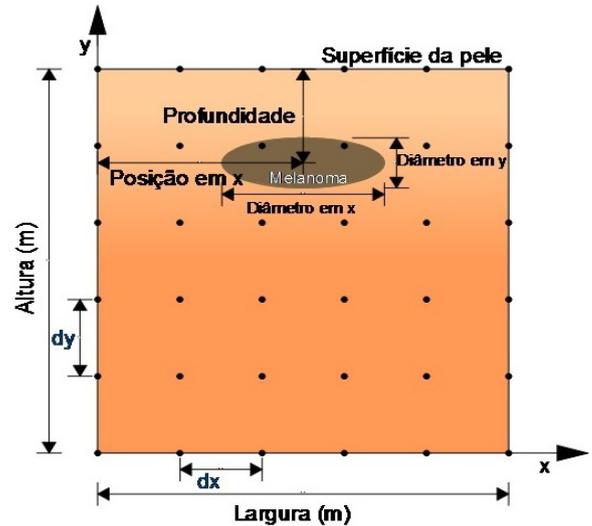


Figura 1. Modelo de representação da visão transversal da pele. Considerando a existência de um melanoma.

Os modelos de Pennes, *Single Phase Lag* (SPL) e *Dual Phase Lag* (DPL) são os mais aceitos para transferência de calor na pele humana⁹. Os três modelos estão representados pelas equações 1a, 1b e 1c, respectivamente.

$$\rho_t c_t \frac{\partial T_t}{\partial t} = \nabla \cdot (k_t \nabla T_t) + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T_t) + Q_{met} + Q_{ext} \quad (1a)$$

$$\tau_q \rho_t c_t \frac{\partial^2 T_t}{\partial t^2} + (\tau_q \omega_b \rho_b c_b + \rho_t c_t) \frac{\partial T_t}{\partial t} =$$

$$\nabla \cdot (k_t \nabla T_t) + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T_t) + Q_{met} + Q_{ext} + \tau_q \frac{\partial Q_{met}}{\partial t} +$$

$$\tau_q \frac{\partial Q_{ext}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\tau_q \rho_t c_t \frac{\partial^2 T_t}{\partial t^2} + (\tau_q \omega_b \rho_b c_b + \rho_t c_t) \frac{\partial T_t}{\partial t} =$$

$$\tau_t \frac{\partial \nabla \cdot (k_t \nabla T_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (k_t \nabla T_t) + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T_t) + Q_{met} + Q_{ext} +$$

$$\tau_q \frac{\partial Q_{met}}{\partial t} + \tau_q \frac{\partial Q_{ext}}{\partial t} \quad (1c)$$

Em que τ_q é o atraso de fase para o vetor de fluxo de calor, τ_t é o atraso de fase para o gradiente de temperatura, k a condutividade térmica do tecido da pele, ρ_t é a massa específica da pele, c_t o calor específico da pele, ρ_b a massa específica do sangue, c_b o calor específico do sangue, ω_b a taxa de perfusão sanguínea, T_a a temperatura do sangue, T_t a temperatura no tecido da pele e Q_{met} a geração de calor metabólico na pele.

Com a finalidade de explorar os três modelos acima representados, optou-se pela utilização do modelo DPL. Tal escolha se da porque ao variar os parâmetros τ_t e τ_q na Equação 1c obtêm-se os modelos SPL e de Pennes. Fazendo $\tau_t = 0$ na Equação 1c o modelo DPL se reduz ao modelo SPL. Ao passo que se $\tau_q = 0$ na Equação 1b o modelo SPL se reduz ao modelo de Pennes. Dessa forma o presente trabalho emprega os três modelos.

Faz-se importante comentar que foi considerado $Q_{ext} = 0$ na Equação 1c.

2.1.1. Condições de contorno.

Para a superfície da pele considerou-se a troca de calor pelo modo de convecção, Equação 2.

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = h_{\infty}(T_{1,j} - T_{\infty}) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_x, y = L_y \quad (2)$$

Em que T_{∞} é a temperatura do ambiente e h_{∞} é o coeficiente de transferência de calor por convecção também conhecido como coeficiente de película.

Para a lateral esquerda e direita usou-se fluxo de calor especificado, respectivamente Equação 3 e 4.

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2q_1 \quad \text{para } 0 \leq y \leq L_y, x = 0 \quad (3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = -2q_2 \quad \text{para } 0 \leq y \leq L_y, x = L_x \quad (4)$$

Para a camada mais interna da pele considerou-se a temperatura prescrita constante, Equação 5.

$$T_{y=0} = T_{constante} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_x, y = 0 \quad (5)$$

2.2. Solução Numérica

Para a solução numérica do problema usou-se o método de diferenças finitas em uma abordagem implícita para o tempo, segundo Sperandio¹³. Desta forma a discretização temporal para as equações diferenciais são dadas pelas equações 6 e 7.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{T_{i,j}^{n-1} - 2T_{i,j}^n + T_{i,j}^{n+1}}{\Delta t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

Para as derivadas da temperatura em relação as coordenadas espaciais foram aproximadas por diferenças finitas centrais, segundo as equações 8 e 9.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (9)$$

Seguindo a mesma abordagem para as derivadas cruzadas do modelo DPL, têm-se as equações 10 e 11.

$$\frac{\partial^3 T}{\partial t \cdot \partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+1}^n - 2(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) + T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i,j-1}^n}{\Delta t \cdot \Delta y^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^3 T}{\partial t \cdot \partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+1,j}^n - 2(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) + T_{i-1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^n}{\Delta t \cdot \Delta x^2} \quad (11)$$

Substituindo-se 6, 7, 8, 9, 10 e 11 em 1c chegou-se a Equação genérica 12:

$$\left(\frac{\tau_q \cdot \rho_t \cdot c_t}{\Delta t^2} + \frac{\rho_t \cdot c_t + \tau_q \cdot \rho_b \cdot \omega_b \cdot c_b}{\Delta t} + \rho_b \cdot \omega_b \cdot c_b + 2 \cdot \frac{k}{\Delta x^2} + 2 \cdot \frac{k}{\Delta y^2} + 2 \cdot \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} + 2 \cdot \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta y^2} \right) \cdot T_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{k}{\Delta x^2} + \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} \right) \cdot T_{i+1,j}^{n+1} - \left(\frac{k}{\Delta x^2} + \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} \right) \cdot T_{i-1,j}^{n+1} - \left(\frac{k}{\Delta y^2} + \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta y^2} \right) \cdot T_{i,j+1}^{n+1} - \left(\frac{k}{\Delta y^2} + \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta y^2} \right) \cdot T_{i,j-1}^{n+1} = \left(2 \cdot \frac{\tau_q \cdot \rho_t \cdot c_t}{\Delta t^2} + \frac{\rho_t \cdot c_t + \tau_q \cdot \rho_b \cdot \omega_b \cdot c_b}{\Delta t} + 2 \cdot \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} + 2 \cdot \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta y^2} \right) \cdot T_{i,j}^n - \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} \cdot T_{i-1,j}^n - \frac{k \cdot \tau_t}{\Delta t \cdot \Delta x^2} \cdot T_{i+1,j}^n - \frac{\tau_q \cdot \rho_t \cdot c_t}{\Delta t^2} \cdot T_{i,j}^{n-1} + Q_{met} + T_a \cdot \rho_b \cdot \omega_b \cdot c_b \quad (12)$$

Na Equação 12 é possível observar que a temperatura em um determinado ponto da malha depende de 10 pontos vizinhos, sendo 4 vizinhos no espaço e 6 temporais. A Figura 2 representa a molécula de cálculo da Equação 12, em que o ponto em vermelho é o ponto no qual se deseja determinar a temperatura e os pontos em azul são os pontos vizinhos necessários para se obter a temperatura.

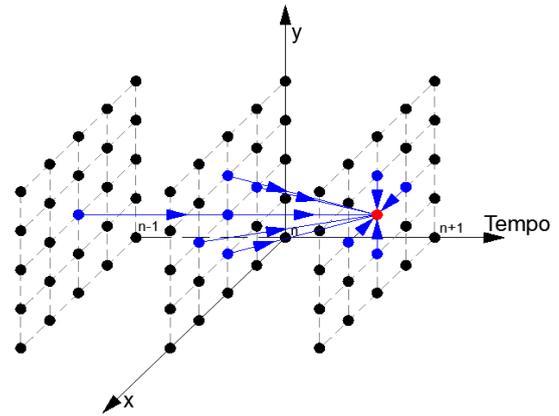


Figura 2. Estêncil ou molécula de cálculo

As condições de contorno, apresentadas na seção anterior foram discretizadas também pelo método de diferenças finitas. As equações 13, 14, 15 e 16 correspondem às condições de contorno na superfície da pele, na lateral esquerda, na lateral direita e na camada mais interna da pele, respectivamente.

$$T_{i_{máx}+1,j} = \frac{-2 \cdot \Delta y \cdot h_{\infty}}{k} \cdot (T_{i,j} - T_{\infty}) + T_{2,j} \quad (13)$$

$$T_{i,0} = \frac{-2 \cdot \Delta x \cdot q_1}{k} + T_{i,2} \quad (14)$$

$$T_{i,j_{máx}+1} = \frac{-2 \cdot \Delta x \cdot q_2}{k} + T_{i,j_{máx}-1} \quad (15)$$

$$T_{0,j} = T_{constante} \quad (16)$$

Assim, o problema gerado pela Equação 12 juntamente com as condições de contorno geram um sistema linear pentadiagonal. Para a resolução do sistema de equações gerado utilizou-se o método gradiente conjugado com o esquema de compressão *Compressed Sparced Row* (CSR), conforme Mendes¹⁴. O modelo de compressão CSR suprime as operações onde os elementos da matriz são nulos.

3. Resultados e Discussões

Com o intuito de verificar a solução numérica realizaram-se comparações com outras soluções disponíveis na literatura.

3.1. Comparação com Lin e Li¹⁵.

Os autores Lin e Li¹⁵ obtiveram a solução analítica unidimensional para os modelos de Pennes, SPL e DPL para diversos valores de τ_q e τ_t . Assim, as condições de contorno (Eq. 3 e 4) foram ajustadas para que o campo de temperatura também fosse unidimensional. Os valores das propriedades físicas usadas são sumarizadas na Tabela 1.

Tabela 1. Dados Lin e Li¹⁵

T_a (°C)	37
ρ_t ($kg\ m^{-3}$)	1190
c_b ($J\ Kg^{-1}\ K^{-1}$)	3600
ω_b ($m^3\ s^{-1}\ m^{-3}$)	0,1
c_t ($J\ Kg^{-1}\ K^{-1}$)	3600
ρ_b ($kg\ m^{-3}$)	1060
k ($W\ m^{-1}\ K$)	0,235
Q_{met} ($W\ m^{-3}$)	368,1

Como condição de contorno na superfície da pele adotou-se uma função de Heaviside, Equação 17.

$$T_{0,j}(t) = \begin{cases} 100 & t < 15s \\ 0 & t > 15s \end{cases} \quad (17)$$

Na Figura 4 pode-se ver uma comparação entre o presente estudo e Lin e Li¹⁵.

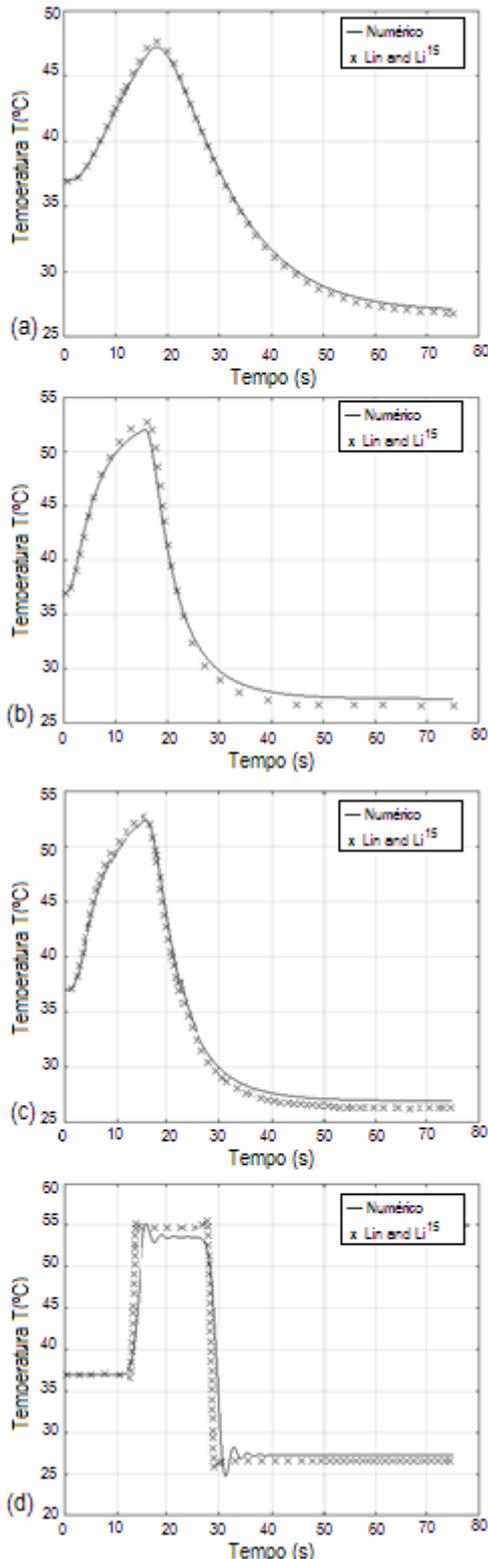


Figura 4. Comparação dos resultados com os obtidos por Lin e Li¹⁵ (a) Modelo DPL $\tau_q = \tau_t = 10s$ (b) Modelo de Pennes $\tau_q = \tau_t = 0$ (c) Modelo DPL $\tau_q = \tau_t = 1s$ (d) Modelo SPL $\tau_q = 10$ e $\tau_t = 0$.

Os valores de τ_q e τ_t foram empregados de forma a explorar os modelos de Pennes e SPL. De um modo geral, com exceção de algumas pequenas oscilações os resultados são próximos aos encontrados pelos autores Lin e Li¹⁵.

Ainda em comparação com os estudos de Lin e Li¹⁵, as Figuras 5 e 6 mostram as temperaturas da malha ao longo do eixo y, para os instantes 5, 15 e 45 segundos. Faz-se importante lembrar que após 15 segundos a temperatura interna passa de 100°C para 0°C, de acordo com a função de Heaviside (Equação 17). Como a temperatura da malha estava inicialmente a 37°C nos primeiros 15 segundos o sistema está aquecendo e posteriormente passa a resfriar.

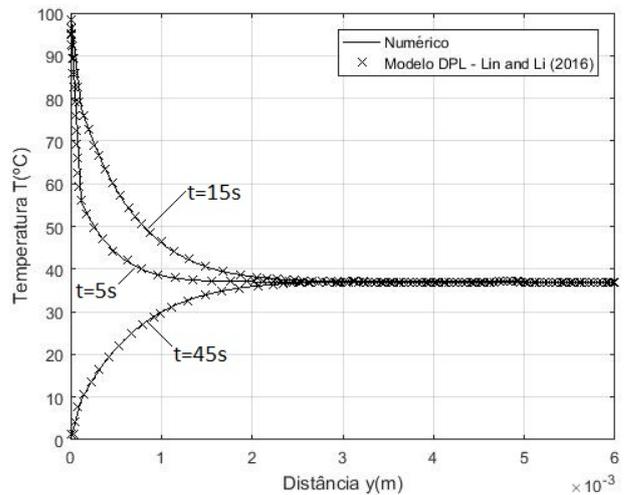


Figura 5. Previsão do modelo DPL, eixo y, para os tempos 5s, 15s e 45s.

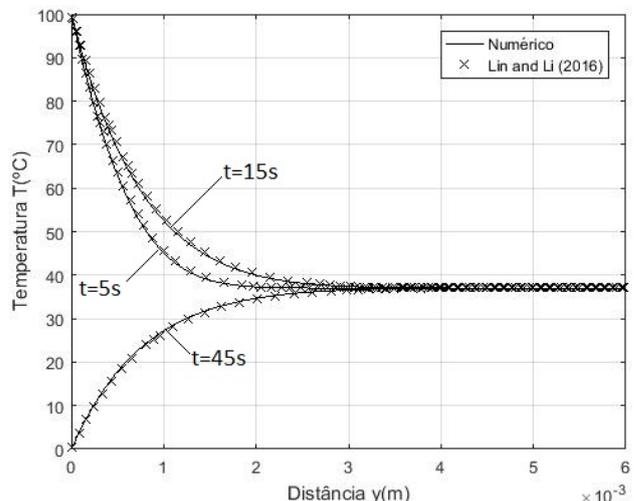


Figura 6. Previsão do modelo de Pennes, eixo y, para os tempos 5s, 15s e 45s.

A Figura 5 mostra os resultados para o modelo DPL enquanto a Figura 6 para o modelo tradicional de Pennes, $\tau_q = \tau_t = 0$. Observa-se que os resultados do presente estudo concordam com os obtidos pelos autores Lin e Li¹⁵.

Com relação ao desempenho de cada um dos três modelos. Comparando as Figuras 4b, modelo de Pennes, e 4d, modelo SPL, observa-se que o modelo SPL atinge uma maior temperatura máxima e posteriormente uma menor temperatura mínima.

Isso acontece porque o τ_q , tempo de relaxação, é o tempo de resposta do fluxo de calor. Ele faz com que a onda térmica se propague com velocidade finita.

Para comparar o desempenho do modelo SPL com o DPL pode-se analisar as Figuras 4a e 4d, pois apresentam o mesmo valor de τ_q . Observa-se que a presença do τ_t , tempo de termalização, prevê um retardo tanto no aquecimento quanto no resfriamento da pele. Isso porque o τ_t elimina a existência da resposta instantânea entre o gradiente de temperatura e o transporte de energia.

Ainda é possível comparar as Figuras 4a, 4c e 4b onde se observa que o retardo no modelo DPL é diretamente proporcional aos valores de τ_q e τ_t . O retardo também pode ser observado nas Figuras 5 e 6.

3.2. Comparação com Shih et al¹⁶ e Liu e Xu¹⁷

A seguir se apresenta uma comparação do presente estudo com o realizado por Shih et al¹⁶. Onde se empregou o modelo de Pennes com condições de fluxo oscilatório dado por $q(0,t) = q_0 e^{i\omega t}$ com fluxo inicial de 5000 W/m². O modelo foi aplicado em uma malha quadrada de 3 cm de lado, inicialmente com 37°C. Considerou-se a temperatura interna da pele 37°C. A Tabela 2 sumariza os valores das propriedades físicas da pele utilizadas nesta etapa.

Tabela 2. Dados Shih et al¹⁷

T_a °C	37
ρ_t (kg m ⁻³)	1050
c_b (J Kg ⁻¹ K ⁻¹)	3770
ω_b (m ³ s ⁻¹ m ⁻³)	0
c_t (J Kg ⁻¹ K ⁻¹)	3770
ρ_b (kg m ⁻³)	1050
k (Wm ⁻¹ K)	0,5
Q_{met} (Wm ⁻³)	0

Na Figura 7 é apresentado os resultados do presente trabalho, juntamente com os apresentados por Shih et al¹⁶ e Liu e Xu¹⁷. A temperatura é referente a superfície da pele na posição x=0. Para o fluxo de calor usou-se $\omega=0,05$.

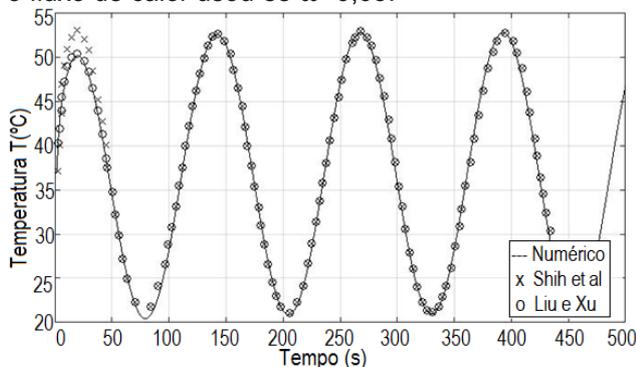


Figura 7. Modelo com fluxo de calor oscilatório com $\omega=0,05$.

Como pode ser observado, os resultados concordam de forma satisfatória com os obtidos por Shih et al¹⁶ e diferem dos encontrados por Liu e Xu¹⁷

apenas no primeiro ciclo oscilatório. Isso ocorre porque o modelo analítico demanda mais tempo para alcançar uma resposta periódica constante, a solução exata do modelo pode fornecer uma maneira adequada de descrever a resposta a temperatura transitória¹⁶. Os autores Shih et al¹⁶ utilizam a técnica de transformada de Laplace para encontrar a solução analítica da Equação de Pennes.

A Figura 8 se difere da Figura 7 apenas por usar $\omega=0,5$ para o fluxo de calor e o tempo de experimento ser de 200 segundos.

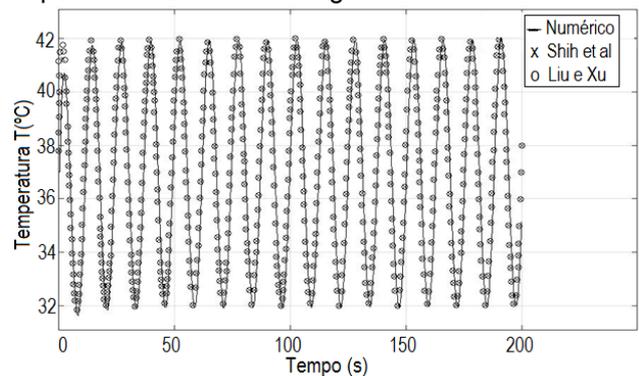


Figura 8. Modelo com fluxo de calor oscilatório com $\omega=0,5$.

Novamente se observa que os resultados obtidos no presente trabalho concordam satisfatoriamente com os obtidos por Shih et al¹⁶ e divergem dos obtidos por Liu e Xu¹⁷ apenas no primeiro ciclo oscilatório.

3.3. Comparação com dados experimentais

Çetingül e Herman¹⁰ utilizaram imagens térmicas para medir a resposta térmica da pele de pacientes com melanoma. Resumidamente, o experimento constituiu em reduzir a temperatura da pele da área mapeada até 15°C e acompanhar a elevação da temperatura da região sadia e não sadia até a pele atingir novamente o equilíbrio térmico, maiores detalhes sobre o experimento pode ser obtido no referido trabalho. A Tabela 3 apresenta os dados usados nesse experimento.

Tabela 3. Dados Çetingül e Herman¹⁸

	Pele saudável	Lesão
$T_{constante}$ °C	37	-
T_a °C	37	37
ρ_t (kg m ⁻³)	1086,2	1030
c_b (J Kg ⁻¹ K ⁻¹)	3539,39	3852
ω_b (m ³ s ⁻¹ m ⁻³)	0,002	0,0315
c_t (J Kg ⁻¹ K ⁻¹)	3539,39	3852
ρ_b (kg m ⁻³)	1086,2	1030
k (Wm ⁻¹ K)	0,44	0,558
Q_{met} (Wm ⁻³)	582,93	3680

Da mesma forma realizada por Çetingül e Herman¹⁰, foi considerado um domínio com 12 mm em x e 11,6 mm em y, contendo um tumor, similar ao representado na Fig. 1. Quanto ao melanoma foi adotado o diâmetro de 2 mm na coordenada x,

diâmetro de 0,44 mm na coordenada y e profundidade do tumor 0,32mm e a posição em x de 6 mm, ou seja, no centro do eixo x .

A Figura 9 mostra os resultados do presente trabalho em comparação com os experimentais e numéricos de Çetingül e Herman¹⁰.

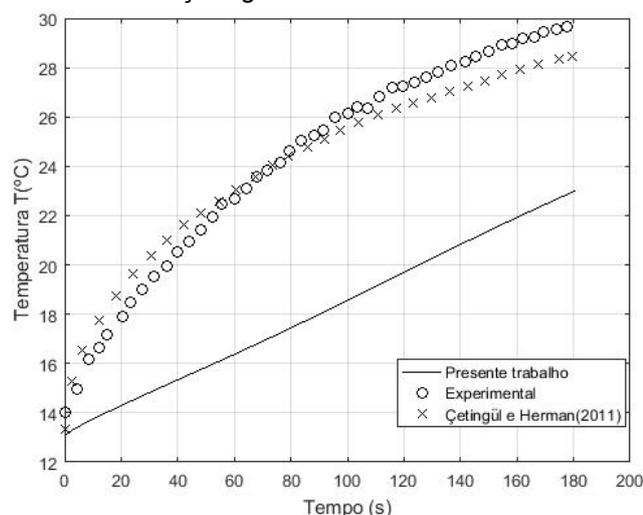


Figura 9. Perfil de temperatura da pele saudável ao longo do tempo.

A Figura 10 difere da Figura 9 por representar a variação de temperatura no centro do tumor.

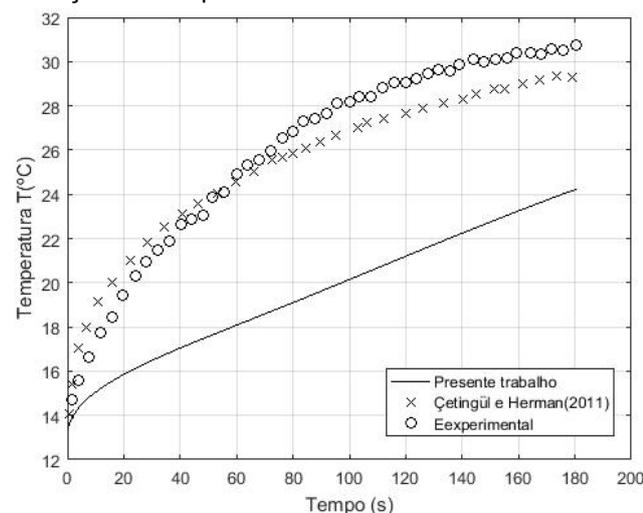


Figura 10. Perfil de temperatura no centro do melanoma ao longo do tempo.

Observa-se nas Figuras 9 e 10 que o aquecimento obtido pelo presente estudo ocorre de forma mais lenta do que o encontrado por Çetingül e Herman¹⁰. Desta forma os resultados não concordam com as autoras¹⁰.

Quanto aos modelos SPL e DPL julgou-se não necessárias a comparação, isso porque ambos os modelos retardariam ainda mais o aquecimento. Ou seja, distanciariam o resultado ainda mais dos experimentais.

Existem diversos estudos referentes a modelos matemáticos que descrevem o comportamento térmico da pele, no entanto não existe um consenso sobre qual o modelo é mais adequado. A fim de apresentar essa problemática a seguir se apresenta diversos trabalhos que fizeram, ao menos como

tentativa, a validação de modelos térmicos para a pele.

Çetingül e Herman¹⁰, utilizando o modelo de Pennes, compararam a previsão do modelo matemático tridimensional com dados experimentais obtidos por meio de imagens térmicas (infravermelho). O modelo matemático foi resolvido por meio do programa COMSOL para a pele humana saudável e também com a presença de tumores, os resultados apontam para a validação do modelo de Pennes.

Nobrega e Coelho¹¹ utilizaram os modelos de Pennes, SPL ($\tau_q = 15,5s$) e DPL ($\tau_q = 16s$ e $\tau_t = 0,043s$). A validação foi realizada utilizando os dados experimentais de Mitra et al.¹² em amostras de carne suficientemente longas para permitir a suposição de uma condução transitória de calor unidimensional em dois sólidos semi-infinitos em contato ao longo de sua superfície. A perfusão de sangue e o metabolismo foram desprezados e as propriedades determinadas experimentalmente da carne processada foram utilizadas, os dados revelaram que a modelo de Pennes não reproduziu os dados experimentais. Em contrapartida, os resultados dos modelos SPL e DPL concordaram satisfatoriamente com dos dados experimentais.

Dutta et al.¹⁸ utilizaram o modelos de Pennes e SPL ($\tau_q = 10s$, $\tau_q = 15s$ e $\tau_q = 20s$). As medidas experimentais, foram obtidas via imagens térmicas (infravermelho), axial e radial, para a distribuição da temperatura em tecido *phantom*, que simula a pele contendo tumores, foi comparada com os resultados de modelagem numérica para casos em que pele é irradiada por uma fonte de laser de pulso curto. Os autores utilizaram o esquema de MacCormack para obtenção da solução numérica. Foi observado que as distribuições de temperatura medidas experimentalmente concordaram com a previsão do modelo SPL.

Andrews et al.¹⁹ utilizaram o modelo de Pennes unidimensional. Dados experimentais obtidos com o auxílio de uma sonda de temperatura subdérmica, os dados foram obtidos de queimaduras em suínos. O modelo matemático calibrado para os parâmetros de queima apresentou uma boa concordância com os dados experimentais. Isso levando-se em conta um desvio padrão considerado razoável pelo autor.

Bezerra² utilizou o modelo de Pennes, sendo inicialmente aplicado um modelo bidimensional e posteriormente um modelo tridimensional simplificado para a mama. O modelo foi resolvido pelo método dos volumes finitos usando programa comercial FLUENT. Para obtenção dos dados experimentais usou-se a técnica de termografia. Resultados satisfatórios foram obtidos apenas para o modelo tridimensional.

Mitra et al.¹² utilizou os modelos de Pennes e SPL ($\tau_q = 15s - 17s$), por meio de uma abordagem unidimensional e usando a técnica numérica de diferenças finitas. Os dados experimentais foram obtidos usando amostras de carne (bolonha) com o auxílio de termopares. O modelo SPL demonstrou com precisão a descrição macroscópica de

condução de calor. O modelo hiperbólico mostrou diferenças significativas em relação ao modelo tradicional de Fourier.

Saccomandi et al.²⁰ utilizaram o modelo de Pennes. O modelo numérico foi resolvido usando a técnica de elementos finitos. Os dados experimentais foram obtidos de pâncreas de suínos com Sensores LGB usando fibra a laser. Os resultados apresentaram concordância entre os valores numéricos e experimentais.

A luz deste cenário, pode-se observar que não existe um consenso sobre qual modelo é mais adequado. Enquanto para alguns estudos o modelo de Pennes apresenta um resultado mais satisfatório outros sinalizam para os modelos DPL e SPL, além disso, os valores de τ_q e τ_t também variam significativamente de um autor para o outro, sendo que estes parâmetros influenciam fortemente na previsão dos modelos e no conceito do modo de condução de calor.

5. Conclusões

No presente trabalho foi obtida a solução numérica do modelo térmico DPL bidimensional em coordenadas cartesianas e por meio da modificação dos valores de parâmetros do modelo DPL obteve-se também a solução numérica dos modelos térmicos SPL e de Pennes para transferência de calor na pele humana com presença ou não de melanoma. O método numérico empregado foi o de diferenças finitas por meio de um esquema implícito. A solução numérica implementada foi verificada com soluções analíticas e numéricas de vários autores e os resultados mostraram excelente concordância, entretanto, nas condições exploradas a partir de dados experimentais os modelos não proveram boa previsão do aquecimento da pele. Contudo, como sugerido por meio do coligimento dos resultados disponíveis na literatura, mais trabalhos experimentais e de modelagem matemática são necessários para a composição de um modelo térmico mais adequado.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao PICME pela concessão da bolsa e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Referências

1. Inca.gov.br [página da internet]. Brasil: Instituto Nacional do Câncer; [acesso 2018 Mar 9]. Disponível em: http://www2.inca.gov.br/wps/wcm/connect/tiposdecancer/site/home/pele_melanoma/definicao+.
2. Bezerra LA. Uso de imagens termográficas em tumores mamários para validação de simulação computacional. [Dissertação de Mestrado]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
3. Pennes HH. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. *Journal of Applied Physiology* 1948; 1, 93-122.
4. Wissler EH. Pennes' 1948 paper revisited. *American Physiological Society* 1998. 8750-7587
5. Bueno FR. Análise inversa com uso de Algoritmo Genético para localização de tumores de pele em três dimensões utilizando Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual. [Tese de Doutorado]. Brasília: Universidade de Brasília; 2012.
6. Cattaneo C. Sulla conduzione del calore. *Atti del Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena* 1948; vol. 3, n. 3.

7. Vernotte P. La véritable équation de la chaleur. *Comptes Rendus de Seances de L'Academie des Sciences* 1958; vol. 247, pp. 2103-2105.
8. Chiwicowsky LD. Uso da função de transferência em problemas de condução do calor com a lei de Fourier Modificada. [Dissertação de Mestrado]. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.; 2002.
9. Bittencourt T PC. Comparação entre o modelo de Pennes e de duplo retardo para a biotransferência de calor na região ao redor da tireoide. [Trabalho de conclusão de curso]. Rio de Janeiro: Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio De Janeiro; 2017
10. Çetigül MP, Herman C. Quantification of the thermal signature of a melanoma lesion. *International Journal of Thermal Sciences* 2011. 50, 421-431.
11. Nobrega S, Coelho PJ. A parametric study of thermal therapy of skin tissue. *Journal of Thermal Biology* 63 2017. 92-103
12. Mitra K, Kumar S, Vedavarz A, Moallemi MK. Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat. *Transactions of the ASME* 1995.
13. Sperandio D, Mendes JT, Silva LHM. *Calculo Numérico, características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. São Paulo: Pearson Prentice Hall; 2003.
14. Mendes, TR. Ströher GR, Romeiro NML. Avaliação do formato de armazenamento Compressed Sparse Row para resolução de sistemas de equações lineares esparsos. *Engvista* 2017; v. 19, n. 4.
15. Lin S, Li C. Analytical solutions of non-Fourier bio-heat conductions for skin subjected to pulsed laser heating. *International Journal of Thermal Sciences* 2016; 110, 146p
16. Shih T, Yuan P, Lin WL, Kou HS. Analytical analysis of the Pennes bioheat transfer equation with sinusoidal heat flux condition on skin surface. *Medical Engineering & Physics* 29 (2007), 946-953
17. Liu J, Xu LX. Estimation of blood perfusion using phase shift in temperature response to sinusoidal heating the skin surface. *IEEE Trans Biomed Eng* 1999;46:1037-43.
18. Dutta A, Kim K, Mitra K, Guo Z. Experimental Measurements And Numerical Modeling Validation of Temperature Distribution In Tissue Medium During Short Pulse Laser Irradiation. *Proceedings of IMECE*. 2007. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition November 11-15, 2007, Seattle, Washington, USA.
19. Andrews CJ, Cuttle L, Simpson MJ. Quantifying the role of burn temperature, burn duration and skin thickness in an in vivo animal skin model of heat conduction. *International Journal of Thermal Sciences* 101 2016.
20. Saccomandi P, Schena E, Caponero MA, Matteo FMD, Martino M, Pandolfi M, Silvestri S. Theoretical Analysis and Experimental Evaluation of Laser-Induced Interstitial Thermo-therapy in Ex Vivo Porcine Pancreas. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, vol. 59, no. 10, October 2012.

Contato:

Thays Rolim Mendes de Oliveira
 Rua Marcílio Dias, 635, CEP: 86812-460,
 Apucarana, PR.
 E-mail: thaysoliveira.2015@alunos.utfpr.edu.br